偏微分方程复习整理

一、偏微分方程中的基本知识

1、一些基本概念

<u>偏微分方程</u>——多元函数$u(\boldsymbol{x})$及其偏导数的关系式，通式$F(\boldsymbol{x},u,Du,\cdots,D^m u)=0$
<u>解</u>——满足偏微分方程的多元函数$u=\varphi(\boldsymbol{x})$，特别地有形式解、通解、特解
<u>阶</u>——实际所含未知函数偏导数的最高阶数
<u>线性算子</u>——满足对任意函数u,v，任意常数c有$\mathcal{L}(u+v)=\mathcal{L}u+\mathcal{L}v,\mathcal{L}(cu)=c\mathcal{L}u$的算子$\mathcal{L}$
<u>自由项</u>——线性偏微分方程中的不含未知函数u及其偏导数的项，即仅由自变量$\boldsymbol{x}$和常数决定的项
<u>主部</u>——拟线性偏微分方程最高阶部分

2、偏微分方程的分类

$$\text{偏微分方程}\xrightarrow{\substack{F\text{是否关于}u,\\ u\text{偏导数线性}}}\begin{cases}\xrightarrow{\text{是}}\text{线 性}\xrightarrow{\text{自由项}f\text{是否为 0}}\begin{cases}\xrightarrow{\text{是}}\text{齐 次}\\ \xrightarrow{\text{否}}\text{非齐次}\end{cases}\\ \xrightarrow{\text{否}}\text{非线性}\xrightarrow{\substack{F\text{是否关于}u\text{最}\\ \text{高阶偏导数线性}}}\begin{cases}\xrightarrow{\text{是}}\text{拟线性}\cdots\xrightarrow{\text{主部系数与}u,u\text{偏导数无关}}\text{半线性}\\ \xrightarrow{\text{否}}\text{完全非线性}\end{cases}\end{cases}$$

<u>齐次方程</u>：$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=0$
<u>非齐次方程</u>：$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=f(x,y)$
<u>拟线性方程</u>：如：$u_{xy}+u_x^2u_y^2u^2u_{yy}+u_x^2+u_y^2+u^2=0$（主部$uu_{xy}+u_x^2u_y^2u^2u_{yy}$）
<u>半线性方程</u>：如：$xu_{xx}+xyu_{xy}+yu_{yy}+uu_x+uu_y=x^2+y^2$
<u>完全非线性方程</u>：如：$u_{xx}^2+u_{xy}+u_{yy}^2+x^2u_x+y^2u_y+u^3=0$

3、经典方程

<u>弦振动方程</u>：$u_{tt}-a^2\left(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}\right)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$
<u>热传导方程</u>：$u_t-a^2\left(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}\right)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$
<u>Poisson 方程</u>：$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
<u>Laplace 方程</u>：$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}=0$

4、定解问题与定解条件

$$\text{定解问题}\begin{cases}\text{泛定方程}\\ \text{定解条件}\begin{cases}\text{初始条件}\\ \text{边界条件}\end{cases}\end{cases}$$

初始条件（关于t的定解条件）

方程类别	初始条件
波动方程	$u(\boldsymbol{x},0)=\varphi(\boldsymbol{x}),u_t(\boldsymbol{x},0)=\psi(\boldsymbol{x})$
热传导方程	$u(\boldsymbol{x},0)=\varphi(\boldsymbol{x})$
Poisson/Laplace 方程	没有初始条件

边界条件（关于$\boldsymbol{x}$的定解条件）

分类	边值问题	编制条件
第一边界条件	Dirichlet 问题	$u\|_\Gamma=\varphi(\boldsymbol{x},t)$

第二边值条件	Neumann 问题	$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right\|_{\Gamma}=\varphi(\boldsymbol{x},t)$
第三边界条件	Robin 问题	$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\right\|_{\Gamma}=\varphi(\boldsymbol{x},t)$

5、定解问题的研究方法——研究适应性

适应性——存在性、唯一性、稳定性

6、经典方程中参数的意义

方程类别	a^2	$f(\boldsymbol{x},t)$
波动方程	$a^2=\frac{T}{\rho}$ 表示弦/膜/波的张力密度	$f=\frac{F}{\rho}$ 表示$\boldsymbol{x}$处单位质量在t收到的外力
热传导方程	$a^2=\frac{\kappa}{C\rho}$	$f=\frac{F}{C\rho}$ $f\le 0$时表示热汇；$f\ge 0$时表示热源

二、一阶方程理论

1、积分曲面、特征线

记半线性方程$\sum_{i=1}^{n}A_i(\boldsymbol{x})u_{x_i}=f(\boldsymbol{x},u)$(PDE)，方程组$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=A_1(\boldsymbol{x})\\ \cdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=A_n(\boldsymbol{x})\end{cases}$(CEs)，即$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(x)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(x)}$(CE)

方程$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}A_i(\boldsymbol{x})u_{x_i}$(PDE′)，方程组(CE′)$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=A_1(\boldsymbol{x})\\ \cdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=A_n(\boldsymbol{x})\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(\boldsymbol{x},u)\end{cases}$

<u>积分曲面</u>——$F(\boldsymbol{x},u,Du)=0$的解$u=u(\boldsymbol{x})$是空间$\{(x_1,\cdots,x_n,u)\}$的一个曲面
<u>特征方程（组）</u>——(CE),(CEs)称为(∗)的特征方程（组）
<u>特征线</u>——(CE),(CEs)的解在$\{(x_1,\cdots,x_n)\}$中表示为一条曲线l。称为(PDE)的特征线
<u>全特征线</u>——(PDE′)的解称为(PDE)的全特征线，其由(CE′)确定。
定理. 所有特征线组成的曲面一定是积分曲面，任何积分曲面也是特征曲线的并。

2、首次积分

记方程组$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=f_1(x,y_1,\cdots,y_n)\\ \cdots\\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=f_n(x,y_1,\cdots,x_n)\end{cases}$(ODEs),$f_i\in C(\Omega)$，$f_i$关于$(y_1,\cdots,y_n)$可微

<u>首次积分</u>——已知非常函数$V=V(x,y_1,\cdots,y_n)$在Ω内连续可微，其沿着(ODEs)的积分曲线$\Gamma:\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x),x\in D$取常数值$V\big(x,y_1(x),\cdots,y_n(x)\big)=C$，这里常数$C$会随着积分曲线变化而变化，称$V(x,y_1,\cdots,y_n)=C$为(ODEs)在$\Omega$内的首次积分。也称$V$为首次积分。

定理. 设$\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)$在Ω内连续可微且非常函数，则$\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)=C$是(ODEs)在Ω内的首次积分的充要条件是：$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+f_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}+\cdots+f_n\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}=0$，其中$(x,y_1,\cdots,y_n)\in\Omega$

3、齐次偏微分方程的解法

记齐次方程$\sum_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x})u_{x_i}=0$(PDE)，方程组$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(\boldsymbol{x})}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(\boldsymbol{x})}$(CE)

通解结构定理. 若$\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$为(CE)的$n-1$个相互独立的首次积分，则$u=\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$为(PDE)通解，其中$\Phi$为关于其所有变元的连续可微函数。

通解计算方法：1）得到特征方程$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(\boldsymbol{x})}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(\boldsymbol{x})}$

2）根据特征方程得到$n-1$个相互独立的首次积分$\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$

3）得到通解$u=\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}),\Phi\in C^1(\Omega)$

特解计算方法：1）如上得到通解$u=\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$

2）由定解条件$u|_{x_1=C}=\psi(x_2,\cdots,x_n)$设$\bar{\varphi}_i=\varphi_i|_{x_1=C}$，反解$x_i=\omega_i(\bar{\varphi}_1,\cdots,\bar{\varphi}_{n-1}),i\geq 2$

3）根据定解条件得到$\Phi(\bar{\varphi}_1,\cdots,\bar{\varphi}_{n-1})=\psi(x_2,\cdots,x_n)=\psi\circ(\omega_2,\cdots,\omega_n)(\bar{\varphi}_1,\cdots,\bar{\varphi}_{n-1})$

4）得到$u=\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})=\psi\circ(\omega_2,\cdots,\omega_n)(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$

4、拟线性/非齐次偏微分方程的解法

记拟线性方程$\sum_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x},u)u_{x_i}=f(\boldsymbol{x},u)$(PDE)，方程$\sum_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{x},u)v_{x_i}+f(\boldsymbol{x},u)v_u=0$(PDE′)

方程组$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(\boldsymbol{x},u)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(\boldsymbol{x},u)}=\frac{\mathrm{d}u}{f}$(CE)

通解结构定理. 若$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$为(CE)的$n$个相互独立的首次积分，$v=\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$为(PDE′)通解，其中$\Phi$为关于其所有变元的连续可微函数，则$\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})=0$为(PDE)隐式通解。

通解计算方法：1）得到特征方程$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(\boldsymbol{x},u)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(\boldsymbol{x},u)}=\frac{\mathrm{d}u}{f}$

2）根据特征方程得到n个相互独立的首次积分$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$

3）得到通解$\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=0$

特解计算方法：1）如上得到通解$\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=0,\Phi\in C^1(\Omega)$

2）由定解条件$u|_{x_1=C}=\psi(x_2,\cdots,x_n)$设$\varphi_i|_{x_1=C,u=\psi}=C_i$

3）利用$\varphi_i|_{x_1=C,u=\psi}=C_i$，消去左端自变量得到$\Phi(C_1,\cdots,C_n)=0$

4）得到$\Phi(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})=0$

三、二阶方程理论

1、特征方程

a）二元拟线性方程$a(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx}+2b(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy}+c(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y)$

特征方程为$a\mathrm{d}y^2-2b\mathrm{d}x\mathrm{d}y+c\mathrm{d}x^2=0$即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

特别地，特征曲线为$\varphi(x,y)=0$时，特征方程为$a\varphi_x^2+2b\varphi_x\varphi_y+c\varphi_y^2=0$

特别地，泛定方程为半线性/线性时，特征方程退化为常微分方程

b）n元线性方程$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x})u_{x_i}+c(\boldsymbol{x})u=f(\boldsymbol{x})$

特征方程为$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})G_{x_ix_j}=0$，或$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\alpha_i\alpha_j=0$(CE)

(CE)在点$P(x_1^0,\cdots,x_n^0)$处的解$l(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$称为在点$P$处的特征方向，$G=0$为特征曲面

2、二阶方程的分类

a）二元线性方程$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+gu=f$，其中$a,b,c,d,e,f,g\in C^2(\Omega)$

$$(x_0,y_0)\in\Omega,\begin{cases}\Delta(x_0,y_0)>0\text{，在该点处为双曲型方程；}\Delta(\Omega)>0\text{，在}\Omega\text{内是双曲型的；}\\ \Delta(x_0,y_0)=0\text{，在该点处为抛物型方程；}\Delta(\Omega)=0\text{，在}\Omega\text{内是抛物型的；}\\ \Delta(x_0,y_0)<0\text{，在该点处为椭圆型方程；}\Delta(\Omega)<0\text{，在}\Omega\text{内是椭圆型的；}\end{cases}$$

在一个子域上$\Delta>0$，另一个子域上$\Delta<0$，为混合型方程；

在一个子域上$\Delta>0$，其它点$\Delta=0$，为退化双曲型方程；

在一个子域上$\Delta<0$，其它点$\Delta=0$，为退化椭圆型方程。

b）常系数主部线性方程$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^n b_i(\boldsymbol{x})u_{x_i}+c(\boldsymbol{x})u=f(\boldsymbol{x})$

$$\text{特征二次型的标准型，}\begin{cases}n\text{个特征值全为 1 或}-1\text{，为椭圆型方程}\\ n\text{个特征值有 1 个 1 和}n-1\text{ 个}-1\text{ 或 1 个}-1\text{ 和}n-1\text{ 个 1，为双曲型方程}\\ n\text{个特征值全非零，且 1 和}-1\text{ 都有一个以上，为超双曲型方程}\\ n\text{个特征值中有一个为 0，其余全为 1 或全为}-1\text{，为抛物型方程}\end{cases}$$

3、二阶方程的化简

a）二元线性方程$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+gu=f$，其中$a,b,c,d,e,f,g\in C^2(\Omega)$

$\Delta>0$时：1）由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{a}$得到两族特征线$\varphi(x,y)=c_1,\psi(x,y)=c_2$

2）作变量替换$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$，计算$u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta}$

3）代入原方程得到第一标准型$u_{\xi\eta}=F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$

4）作变量替换$\begin{cases}\bar{x}=\xi+\eta\\ \bar{y}=\xi-\eta\end{cases}$重复上述步骤得到$u_{\bar{x}\bar{x}}-u_{\bar{y}\bar{y}}=\bar{F}(\bar{x},\bar{y},u,u_{\bar{x}},u_{\bar{y}})$

$\Delta=0$时：1）由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b}{a}$得到特征线$\varphi(x,y)=c$

2）作变量替换$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=y\end{cases}$，计算$u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta},u_{\eta\eta}$

3）代入原方程得到标准型$u_{\eta\eta}=F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$

$\Delta<0$时：1）由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b\pm\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a}$得到特征线$\varphi(x,y)=c_1,\psi(x,y)=c_2$

2）作变量替换$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$进一步$\begin{cases}\bar{\xi}=\frac{1}{2}(\xi+\eta)\\ \bar{\eta}=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\xi-\eta)\end{cases}$，计算$u_{\bar\xi},u_{\bar\eta},u_{\bar\xi\bar\xi},u_{\bar\xi\bar\eta},u_{\bar\eta\bar\eta}$

3）代入原方程得到标准型$u_{\bar\xi\bar\xi}+u_{\bar\eta\bar\eta}=F(\bar\xi,\bar\eta,u,u_{\bar\xi},u_{\bar\eta})$

b）常系数主部线性方程$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^n b_i(\boldsymbol{x})u_{x_i}+c(\boldsymbol{x})u=f(\boldsymbol{x})$

1）得到特征二次型$\mathcal{D}=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\alpha_i\alpha_j$

2）在变换$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B\beta}$下将特征二次型转化为$\mathcal{D}=\sum_{i=1}^n\lambda_i\beta_i^2$，并且可知$\boldsymbol{B}^\mathrm{T}\boldsymbol{AB}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

3）作自变量替换$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}^\mathrm{T}\boldsymbol{x}$，即$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B}^\mathrm{T})^{-1}\boldsymbol{y}$，有$D_{\boldsymbol{y}}u=D_{\boldsymbol{x}}u\frac{D(\boldsymbol{x})}{D(\boldsymbol{y})}=D_{\boldsymbol{x}}u(\boldsymbol{B}^\mathrm{T})^{-1}$

4）代入原方程得到标准型$\sum_{i=1}^n\lambda_i u_{y_iy_i}+\sum_{i=1}^n B_i(\boldsymbol{y})u_{y_i}+C(\boldsymbol{y})u=F(\boldsymbol{y})$

四、波动方程求解

1、一些基本原理

线性叠加原理．如下有边界条件时，u,u_t,u_{tt}自然由边界控制，否则$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$

a）(Ⅰ)$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta_x u=f(\boldsymbol{x},t),t>0\\u|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{x}),u_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{x})\\ [u|_\Gamma=0(\text{有边界条件时})]\end{cases}$的解$u$可以表示为问题(Ⅱ)$\begin{cases}\bar u_{tt}-a^2\Delta_x\bar u=0,t>0\\ \bar u|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{x}),\bar u_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{x})\\ [\bar u|_\Gamma=0(\text{有边界条件时})]\end{cases}$的解$\bar u$与

(Ⅲ)$\begin{cases}\tilde u_{tt}-a^2\Delta_x\tilde u=f(\boldsymbol{x},t),t>0\\ \tilde u|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{x}),\tilde u_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{x})\\ [\tilde u|_\Gamma=0(\text{有边界条件时})]\end{cases}$的解$\tilde u$之和$u=\bar u+\tilde u$

b）$\bar u$可表示为$(\text{Ⅱ})_1\begin{cases}\bar u_{tt}^{(1)}-a^2\Delta_x\bar u^{(1)}=0,t>0\\ \bar u^{(1)}\big|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{x}),\bar u_t^{(1)}\big|_{t=0}=0\\ [\bar u|_\Gamma=0(\text{有边界条件时})]\end{cases}$的解$\bar u^{(1)}$和$(\text{Ⅱ})_2\begin{cases}\bar u_{tt}^{(2)}-a^2\Delta_x\bar u^{(2)}=0,t>0\\ \bar u^{(2)}\big|_{t=0}=0,\bar u_t^{(2)}\big|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{x})\\ [\bar u|_\Gamma=0(\text{有边界条件时})]\end{cases}$的解$\bar u^{(2)}$

之和$\bar u=\bar u^{(1)}+\bar u^{(2)}$

三部分解的关系. 形式地记$(\text{Ⅱ})_2$的解为$\bar u^{(2)}=U_\psi(\boldsymbol{x},t)$，则$\bar u^{(1)}=\frac{\partial}{\partial t}U_\varphi(\boldsymbol{x},t),\tilde u=\int_0^t U_{f_\tau}(\boldsymbol{x},t-\tau)\mathrm{d}\tau$

齐次化/Duhamel 原理. $w(\boldsymbol{x},t,\tau)$是$\begin{cases}w_{tt}-a^2\Delta_x w=0,t>\tau\\ w|_{t=\tau}=0,w_t|_{t=\tau}=f(\boldsymbol{x},\tau)\\ [w|_\Gamma=0,t>\tau(\text{有边界条件时})]\end{cases}$的解，则$\tilde u=\int_0^t w(\boldsymbol{x},t,\tau)\mathrm{d}\tau$是(Ⅲ)的解

边界齐次化. 使用辅助函数$U(\boldsymbol{x},t)$作变换$v=u-U$可将边界其次化

辅助函数	**半无界**	**两端有界**
第一边值	$u(0,t)=\mu(t)$ $U=\mu(t)$	$u(0,t)=\mu_1(t),u(l,t)=\mu_2(t)$ $U=\mu_1(t)+\frac{x}{l}(\mu_2(t)-\mu_1(t))$
第二边值	$u_x(0,t)=\mu(t)$ $U=x\mu(t)$	$u_x(0,t)=\mu_1(t),u_x(l,t)=\mu_2(t)$ $U=x\mu_1(t)+\frac{x^2}{2l}(\mu_2(t)-\mu_1(t))$
第三边值	\	$u(0,t)=\mu_1(t),u_x(l,t)=\mu_2(t)$ $U=\mu_1(t)+\mu_2(t)x$
		$u_x(0,t)=\mu_1(t),u(l,t)=\mu_2(t)$ $U=\mu_1(t)(x-l)+\mu_2(t)$

2、齐次方程的 Cauchy 问题——特征线法/d'Alembert 公式

问题$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,t>0\\u|_{t=0}=\varphi(x)\\u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$

1）作变量替换$\begin{cases}\xi=x-at\\ \eta=x+at\end{cases}$，化为第一标准型$u_{\xi\eta}=0$

2）求解第一标准型得到$u=F(\xi)+G(\eta),F,G\in C^2(\Omega)$

3）代回原变量得到$u=F(x-at)+G(x+at)$

4）带入初始条件得到$\begin{cases}u|_{t=0}=F(x)+G(x)=\varphi(x)\\u_t|_{t=0}=a(-F'(x)+G'(x))=\psi(x)\end{cases}$，得到$\begin{cases}F(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{C}{2}\\G(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{C}{2}\end{cases}$

5）得到 d'Alembert 公式$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau$

3、d'Alembert 公式的意义

物理意义：弦上的初始扰动以行波形式向左右传播、速度为a，整体的波形即为左右行波的叠加

几何意义：$u(A)+u(C)=u(B)+u(D)$

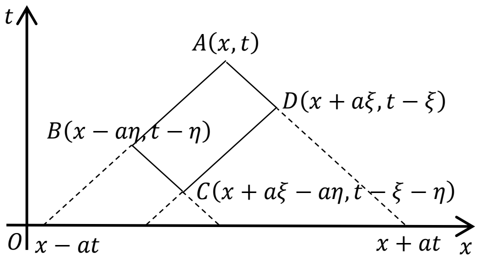
依赖区间：$u(x,t)$依赖于$[x-at,x+at]$的初始条件

决定区域：$D=\{(x,t):x_1+at\le x\le x_2-at,t>0\}$

处函数值由区间$[x_1,x_2]$的初始条件决定

影响区域：$G=\{(x,t):x_1-at\le x\le x_2+at,t>0\}$

处函数值受区间$[x_1,x_2]$的初始条件影响



4、非齐次方程的 Cauchy 问题

问题$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$

1）线性叠加原理，先求问题（Ⅰ）$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),t>0\\ u|_{t=0}=0\\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}$和（Ⅱ）$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\\ u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$的解

2）构造辅助问题(Ⅲ)$\begin{cases}w_{tt}-a^2w_{xx}=0,t>\tau\\ w|_{t=\tau}=0\\ w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau)\end{cases}$，变量替换$t'=t-\tau$，利用 d'Alembet 公式可得问题

(Ⅲ)的解$w(x,t,\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi$

3）由齐次化原理得到问题（Ⅰ）的解$u_1(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$

4）利用 d'Alembet 公式可得问题（Ⅱ）的解$u_2(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau$

5）得到原问题的解$u=u_1+u_2$

5、齐次方程的混合问题

a）半有界弦的自由振动——反射波/沿拓法

问题$(*)\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,0<x<\infty,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x),0\le x<\infty\\ u|_{x=0}=0,t\ge 0\end{cases}$及问题$(**)\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,0<x<\infty,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x),0\le x<\infty\\ u_x|_{x=0}=0,t\ge 0\end{cases}$

1）延拓边界，对$(*)$奇沿拓$\begin{cases}\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),x\ge 0\\ -\varphi(-x),x<0\end{cases}\\ \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),x\ge 0\\ -\psi(-x),x<0\end{cases}\end{cases}$；对$(**)$偶沿拓$\begin{cases}\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),x\ge 0\\ \varphi(-x),x<0\end{cases}\\ \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),x\ge 0\\ \psi(-x),x<0\end{cases}\end{cases}$

2）构造辅助问题$(*)'\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,t>0\\ u|_{t=0}=\Phi(x),u_t|_{t=0}=\Psi(x)\\ u|_{x=0}=0,t\ge 0\end{cases}$及$(**)'\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,t>0\\ u|_{t=0}=\Phi(x),u_t|_{t=0}=\Psi(x)\\ u_x|_{x=0}=0,t\ge 0\end{cases}$

3）求解辅助问题对应的 Cauchy 问题（d'Alembet 公式）得到

$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\tau)\mathrm{d}\tau$，该解自然满足边界条件

4）将该解限制在第一象限得到原问题的解

$(*)$的解$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau,x\ge at\\ \frac{1}{2}[-\varphi(at-x)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau,0\le x<at\end{cases}$

$$(**)\text{的解}u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau,x\ge at\\ \frac{1}{2}[\varphi(at-x)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\left\{\int_0^{at-x}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^{x+at}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau\right\},0\le x<at\end{cases}$$

b）有界弦的自由振动——分离变量/Fourier 法

问题$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,0<x<l,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x),0\le x\le l\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0,t\ge 0\end{cases}$（第一边值条件为例）

1）考虑解具有形式$u(x,t)=X(x)T(t)$，代入原方程$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda$，即$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ T''(t)+\lambda a^2T(t)=0\end{cases}$

2）带入边值条件得到特征问题$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$(CP1)和$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0$(CP2)

3）求解特征问题(CP1)得到特征值$\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}$和特征函数$X_k(x)=c_k\sin\frac{k\pi}{l}x,k=1,2,\cdots,n$

4）求解特征问题(CP2)得到通解$T_k(t)=a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t,k=1,2,\cdots n$

5）得到级数形式解$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,A_k=a_kc_k,B_k=b_kc_k$

6）进一步确定参数，得到$u_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$，带入初始条件可得

$\begin{cases}\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x\\ \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\end{cases}$，由级数理论得$\begin{cases}A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x\\ B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x\end{cases}$

6、非齐次方程的混合问题

问题$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),0<x<l,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x),0\le x\le l\\ u|_{x=0}=\mu_1(t),u|_{x=l}=\mu_2(t),t\ge 0\end{cases}$（第一边值条件为例）

1）将边界其次化$v=u-U$得到新问题$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=\bar{f}(x,t),0<x<l,t>0\\ v|_{t=0}=\bar{\varphi}(x),v_t|_{t=0}=\bar{\psi}(x),0\le x\le l\\ v|_{x=0}=0,v|_{x=l}=0,t\ge 0\end{cases}$

2）线性叠加原理，先求问题（Ⅰ）$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=\bar{f}(x,t),0<x<l,t>0\\ v|_{t=0}=0,v_t|_{t=0}=0,0\le x\le l\\ v|_{x=0}=0,v|_{x=l}=0,t\ge 0\end{cases}$ 和

（Ⅱ）$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=0,0<x<l,t>0\\ v|_{t=0}=\bar{\varphi}(x),v_t|_{t=0}=\bar{\psi}(x),0\le x\le l\\ v|_{x=0}=0,v|_{x=l}=0,t\ge 0\end{cases}$的解

3）构造辅助问题(Ⅲ)$\begin{cases}w_{tt}-a^2w_{xx}=0,0<t<l,t>\tau\\ w|_{t=\tau}=0,w_t|_{t=\tau}=\bar{f}(x,\tau),0\le x\le l\\ w|_{x=0}=0,w|_{x=l}=0,t\ge 0\end{cases}$，变量替换$t'=t-\tau$，利用分离变量法

可得问题(Ⅲ)的解$w(x,t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x$

3）由齐次化原理得到问题（Ⅰ）的解$v_1(x,t)=\int_0^t w(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l B_k(\tau)\sin\frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x$

4）利用分离变量法可得问题（Ⅱ）的解$v_2(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$

5）得到原问题的解$u = v_1 + v_2 + U$

6）进一步确定参数，得$\begin{cases} A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \bar{\varphi}(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \bar{\psi}(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ B_k(\tau) = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \bar{f}(x,\tau)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \end{cases}$

五、波动方程解的适定性

1、公式解的适定性

a）若$\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$，则（四 2、）d'Alembet 公式给出的$u(x,t)$是原问题的解，并且是稳定的

b）若$f \in C^2(\{(x,t): t > 0\}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$，则（四 4、）公式给出的$u(x,t)$是原问题的解

c）若$[0,l]$上φ二次连续可微，三阶导数分段连续，ψ连续可微，二阶导数分段连续且满足相容性条件，则（四 5、）公式给出的级数解是原问题的解

2、能量积分

第一边值$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta_x u = 0, \boldsymbol{x} \in \Omega, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x}), u_t|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \\ u|_{\Gamma\times[0,+\infty)} = 0 \end{cases}$的能量积分：$E(t) = \frac{1}{2}\int\cdots\int_\Omega (u_t^2 + a^2|\nabla_x u|^2)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$

第二边值$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta_x u = 0, \boldsymbol{x} \in \Omega, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x}), u_t|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\Gamma\times[0,+\infty)} = 0 \end{cases}$的能量积分：$E(t) = \frac{1}{2}\int\cdots\int_\Omega (u_t^2 + a^2|\nabla_x u|^2)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$

第三边值$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta_x u = 0, \boldsymbol{x} \in \Omega, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x}), u_t|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma\times[0,+\infty)} = 0 \end{cases}$的能量积分：

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\cdots\int_\Omega (u_t^2 + a^2|\nabla_x u|^2)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n + \frac{1}{2}a^2\sigma\int\cdots\int_\Gamma u^2\,\mathrm{d}S$$

3、唯一性

证明问题$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta_x u = f(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{x} \in \Omega, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x}), u_t|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \\ \left(\sigma_1\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma_2 u\right)\Big|_{\Gamma\times[0,+\infty)} = \mu(\boldsymbol{x},t) \end{cases}$的解唯一

1）设u_1, u_2为原问题的解，则$u = u_1 - u_2$是$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta_x u = 0, \boldsymbol{x} \in \Omega, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \\ \left(\sigma_1\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma_2 u\right)\Big|_{\Gamma\times[0,+\infty)} = 0 \end{cases}$ 的解

2）构造能量积分$E(t)$，计算$E'(t)$，证明$E'(t) = 0$

3）利用初始、边界条件得到$E(0) = 0$，从而$E(t) \equiv 0$

4）由$E(t) \equiv 0$得到$u_{x_i} \equiv 0, u \equiv 0$，从而$u_1 = u_2$，即得原问题解唯一

4、稳定性

1）设$E_0(t) = \frac{1}{2}\iint_\Omega u^2(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，利用 Gronwall 不等式可得$E_0(t) \le \mathrm{e}^t E_0(0) + E(0)(\mathrm{e}^t - 1)$

2）初始值变化$\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2(\Omega)},\|\psi_1-\psi_2\|_{L^2(\Omega)},\|\varphi_{1x}-\varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega)},\left\|\varphi_{1y}-\varphi_{2y}\right\|_{L^2(\Omega)},\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2(\Gamma)}<\delta$

3）令$\delta=\varepsilon[\mathrm{e}^T(2+2a^2+a^2\sigma)]^{-\frac{1}{2}}$，利用能量不等式可以得到$0\le t\le T$时$\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon$

4）设$F(t)=\frac{1}{2}\iint_\Omega f^2(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得到能量不等式$E(t)\le \mathrm{e}^tE(0)+\mathrm{e}^t\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}F(\tau)\mathrm{d}\tau$，仿照上述过程可以得到解对自由项$f(x,y,t)$的连续依赖性

六、热传导方程求解

1、齐次方程的 Cauchy 问题——Poisson 公式

问题$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$

1）对 Cauchy 问题关于x作 Fourier 变换$\hat{u}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x\,,\hat{\varphi}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,t)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x$

则原问题变为(Ⅰ)$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(\omega,t)+a^2\omega^2\hat{u}(\omega,t)=0,t>0\\ \hat{u}(\omega,t)|_{t=0}=\hat{\varphi}(\omega)\end{cases}$

2）求解问题(Ⅰ)，得到$\hat{u}(\omega,t)=(*)$

3）对$(*)$作 Fourier 逆变换，得到$u(x,t)=\left(\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}\right)^{\vee}=\varphi(x)*\left(\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}\right)^{\vee}$

4）计算$\left(g(x,t)\right)^{\wedge}=\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}$得$g(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$

5）得到 Poisson 公式$u(x,t)=\varphi(x)*\left(\mathrm{e}^{-a^2\omega^2t}\right)^{\vee}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}y$

可以改写成热核函数$G(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}},t>0\\ 0,t\le 0\end{cases}$，则$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y$

2、非齐次方程的 Cauchy 问题

问题$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$

1）线性叠加原理，先求问题(Ⅰ)$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),t>0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$和(Ⅱ)$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$的解

2）构造辅助问题(Ⅲ)$\begin{cases}w_t-a^2w_{xx}=0,t>\tau\\ w|_{t=\tau}=f(x,\tau)\end{cases}$，变量替换$t'=t-\tau$，利用 Poisson 公式可得问题(Ⅲ)的解$w(x,t,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y$

3）由齐次化原理得到问题(Ⅰ)的解$u_1(x,t)=\int_0^tw(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$

4）利用 Poisson 公式可得问题(Ⅱ)的解$u_2(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y$

5）得到原问题的解$u=u_1+u_2$

3、齐次方程的混合问题

a）半有界热传导

问题$(*)\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,0<x<\infty,t>0\\u|_{t=0}=\varphi(x),0\le x<\infty\\u|_{x=0}=0,t\ge 0\end{cases}$ 及问题$(**)\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,0<x<\infty,t>0\\u|_{t=0}=\varphi(x),0\le x<\infty\\u_x|_{x=0}=0,t\ge 0\end{cases}$

1）延拓边界，对$(*)$奇沿拓$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),x\ge 0\\-\varphi(-x),x<0\end{cases}$；对$(**)$偶沿拓$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),x\ge 0\\\varphi(-x),x<0\end{cases}$

2）构造辅助问题$(*)'\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,t>0\\u|_{t=0}=\Phi(x)\\u|_{x=0}=0,t\ge 0\end{cases}$ 及$(**)'\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,t>0\\u|_{t=0}=\Phi(x)\\u_x|_{x=0}=0,t\ge 0\end{cases}$

3）求解辅助问题对应的 Cauchy 问题（Poisson 公式）得到

$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\omega)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\omega$，该解自然满足边界条件

4）将该解限制在第一象限得到原问题的解

$(*)$的解$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}-\mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(y)\mathrm{d}y$

$(**)$的解$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}+\mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(y)\mathrm{d}y$

b）有界热传导——分离变量/Fourier 法

问题$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,0<x<l,t>0\\u|_{t=0}=\varphi(x),0\le x\le l\\u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0,t\ge 0\end{cases}$ （第一边值条件为例）

1）考虑解具有形式$u(x,t)=X(x)T(t)$，代入原方程$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda$，即$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\T'(t)+\lambda a^2T(t)=0\end{cases}$

2）带入边值条件得到特征问题$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\X(0)=X(l)=0\end{cases}$(CP1)和$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$(CP2)

3）求解特征问题(CP1)得到特征值$\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}$和特征函数$X_k(x)=b_k\sin\frac{k\pi}{l}x,k=1,2,\cdots,n$

4）求解特征问题(CP2)得到通解$T_k(t)=a_k\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2t},k=1,2,\cdots n$

5）得到级数形式解$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2t}\sin\frac{k\pi}{l}x,A_k=a_kb_k$

6）进一步确定参数，得$A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$

4、非齐次方程的混合问题

问题$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),0<x<l,t>0\\u|_{t=0}=\varphi(x),0\le x\le l\\u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0,t\ge 0\end{cases}$ （第一边值条件为例）

1）将边界其次化$v=u-U$得到新问题$\begin{cases}v_t-a^2v_{xx}=\bar{f}(x,t),0<x<l,t>0\\v|_{t=0}=\bar{\varphi}(x),0\le x\le l\\v|_{x=0}=0,v|_{x=l}=0,t\ge 0\end{cases}$

2）线性叠加原理，先求问题（Ⅰ）$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x,t), 0 < x < l, t > 0 \\ v|_{t=0} = 0, 0 \le x \le l \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0, t \ge 0 \end{cases}$ 和

（Ⅱ）$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ v|_{t=0} = \bar{\varphi}(x), 0 \le x \le l \\ v|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = 0, t \ge 0 \end{cases}$ 的解

3）构造辅助问题(Ⅲ)$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, 0 < t < l, t > \tau \\ w|_{t=\tau} = \bar{f}(x,t), 0 \le x \le l \\ w|_{x=0} = 0, w|_{x=l} = 0, t \ge 0 \end{cases}$，变量替换$t' = t - \tau$，利用分离变量法可得问题(Ⅲ)的解$w(x,t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\tau) \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \sin\frac{k\pi}{l} x$

3）由齐次化原理得到问题（Ⅰ）的解$v_1(x,t) = \int_0^t w(x,t,\tau) \mathrm{d}\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t B_k(\tau) \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \mathrm{d}\tau \cdot \sin\frac{k\pi}{l} x$

4）利用分离变量法可得问题（Ⅱ）的解$v_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi}{l} x$

5）得到原问题的解$u = v_1 + v_2 + U$

6）进一步确定参数，得$\begin{cases} A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\varphi}(x) \sin\frac{k\pi}{l} x \, \mathrm{d}x \\ A_k(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{f}(x,\tau) \sin\frac{k\pi}{l} x \, \mathrm{d}x \end{cases}$

七、热传导方程解的适定性

a）若$\varphi \in C(\mathbb{R})$且有界，则（六 1、）Poisson 公式给出的$u(x,t)$是原问题的解

b）若$\varphi \in C(\mathbb{R}), \psi \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$且均有界，则（六 2、）公式给出的$u(x,t)$是原问题的解

c）若$\varphi \in C([0,l])$，且$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$，则（六 3、）公式给出的级数解是原问题的解